DIE EMPFINDLICHE FLAMME ALS HILFSMITTEL ZUR BESTIMMUNG DER SCHWINGUNGSZAHL HOHER TÖNE.

Inaugural-Dissertation

einer

hohen philosophischen Facultät (II. Section)

der

Kgl. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

am 11. Juni 1902

zur Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt von

Nikolaus Schmidt

aus München.

MÜNCHEN

Druck von W. Kromer

1902.

Vorwort.

Die nachfolgende Abhandlung ist angekündigt in einer Notiz: „eine Beobachtung an sensiblen Flammen“ (Verhandlungen der Deutschen physikal. Gesellschaft, Januar 1900).

Im Mai 1900 wurde sie als Prüfungsarbeit eingereicht und in der Zwischenzeit um- und ausgearbeitet.

Zu grösstem Dank verpflichtet bin ich meinen hochverehrten Lehrern, Herrn Geheimrat *Dr. W. C. Roentgen* für viele wertvolle Ratschläge und entgegenkommendste Überlassung von Apparaten, Herrn *Prof. Dr. L. Graetz* und Herrn Privatdozent *Dr. J. Stark* für Anregung und Förderung meiner Arbeit, bezw. Anschaffung von Apparaten, sowie auch Herrn *Prof. Dr. M. Th. Edelmann* für bereitwilligste Überlassung von Apparaten.

Ihnen allen herzlichen Dank!

Die vorliegende Abhandlung fand ihre Anregung in der zwischen Herrn *G. Appunn* in Hanau, dem Verfertiger akustischer Instrumente, und Herrn Geheimrat *Melde* in Marburg 1897–98 schwebenden Polemik über die Bestimmung der Schwingungszahl höher Töne.

Appunn bestimmte die Schwingungszahl seiner Serie von 33 Stimmgabeln ($c_4 = 2048$ bis $g_8 = 49152$ v. d.) durch Schätzung mittelst des Gehörs.

Melde untersuchte diese Gabeln nach subjektiven und objektiven Methoden und konstatierte, namentlich in den beiden höchsten Oktaven, eine kaum glaubliche Abweichung ihrer wirklichen Schwingungszahlen von den angeblichen.

Schon 1894[1]) wies *Melde* an *Appunn*schen Gabeln, die er mittels der Resonanzmethode untersuchte, grosse Irrtümer nach.

1897 prüften *Stumpf* und *Meyer*[2]) *Appunns* Gabeln durch Differenztöne und gelangten zu denselben Resultaten wie *Melde*.

Hierauf veröffentlichte *Appunn* eine kleine Abhandlung „Schwingungszahlbestimmung bei sehr hohen Tönen“[3]), in der er eine Berechnung der Tonhöhe von Pfeifchen aus ihren Dimensionen versuchte; er stellte für seine Pfeifchen eine Winddrucktabelle auf, deren Unrichtigkeit von *Stumpf*[4]) erwiesen ist. *Appunn* trat mit Nachdruck für die Richtigkeit seiner Schwingungszahlbestimmung ein.

1898 fand *Melde*[5]) seine früheren Resultate nach drei verschiedenen Methoden bestätigt, nämlich durch eine ob-

---

[1]) W. A. 52, p. 238 ff.
[2]) W. A. 63, p. 772 ff.
[3]) W. A. 64, p. 409 ff.
[4]) W. A. 68, p. 112.
[5]) W. A. 65, p. 645 ff.

jektive Schreibmethode, objektive Resonanzmethode und subjektive Differenztonmethode.

Nochmals erschien nach einer kurzen Erwiderung von *Stumpf* und *Meyer* [1]) ein Aufsatz *Appunns* „Bestimmung der Schwingungszahlen von Pfeifchen auf optischem Wege“ [2]) ohne eine genaue Angabe des Verfahrens; da aber die Resultate sehr mangelhaft waren, erkannte *Appunn*, wie es scheint, jeden weiteren Versuch, seine Behauptungen durch positive Beweise zu erhärten, als aussichtslos und griff die Differenztonmethode in einer Veröffentlichung an: „Warum sind Differenztöne zu Schwingungszahlbestimmungen nicht geeignet?“ [3]) Dieser Aufsatz ist deshalb von geringem Wert, weil *Appunn* stets von der Anwendung eines einzigen Vergleichstones (8000 v. d.) für alle Töne ausgeht. In diesem Falle würden allerdings Intervalle von mehreren Oktaven entstehen, und die Ordnung der auftretenden Kombinationstöne könnte nicht mit Sicherheit bestimmt werden.

1899 wies *Stumpf* [4]) in der Abhandlung: „Über die Bestimmung hoher Schwingungszahlen durch Differenztöne“ an der Hand eines in Notenschrift gegebenen Beispieles die Ordnung der Kombinationstöne genau nach und betonte, dass bei Tönen bis zu 13000 v. d. Irrungen ausgeschlossen seien.

Gleichzeitig untersuchte *Schulze* [5]) *Appun*sche Pfeifchen durch drei Methoden: eine optische Methode, *Quinckes* Interferenzmethode und *Kundt*sche Staubfiguren gaben übereinstimmend die bekannten Resultate.

Damit war die Polemik endgiltig erledigt. Zugleich war der Beweis erbracht, dass auch ein gutes Gehör, dessen sich *Appunn* rühmte, bei hohen Tönen leicht Täuschungen ausgesetzt ist.

Da ich über ein musikalisch sehr geschultes Gehör verfüge, machte ich mich an die Aufgabe, die äusserste Grenze der Anwendbarkeit der subjektiven Tonhöhenbe-

[1]) W. A. 65, p. 641.
[2]) W. A. 67, p. 217 ff.
[3]) W. A. 67, p. 222 f.
[4]) W. A. 68, p. 105.
[5]) W. A. 68, p. 99.

stimmung durch Differenztöne zu ermitteln, sowie einen Versuch zur Aufstellung einer objektiven Methode zu machen.

Den ersten Teil meiner Aufgabe vermochte ich ohne Schwierigkeit zu lösen, wobei ich fand, dass die Differenztonmethode für jede noch so grosse Tonhöhe anwendbar ist; bezüglich des zweiten Teiles gelang mir die Aufstellung einer Methode, welche weder rein objektiv, noch auch subjektiv zu nennen ist, welche aber unter Vereinigung beider Eigenschaften zu sehr befriedigenden Resultaten führt.

Da *Melde*[1]) darauf hinweist, dass sich die sensitive Flamme unter der Einwirkung hoher Töne in auffallender Weise verändert, richtete sich mein Augenmerk hauptsächlich auf sie, und ich bemerkte bald eine ebenso hübsche als überraschende Erscheinung an ihr, durch welche sie ein wertvolles Hilfsmittel zur Lösung meiner Aufgabe wurde.

Zur Herstellung sehr empfindlicher Flammen benutzte ich mehrere ca. 20 cm lange und 1,5 cm weite Glasröhren, deren eines Ende ich bis auf eine Öffnung von 0,5—1 mm Weite zufallen liess. (S. Fig. 1).

Mit Leuchtgas, das aus einem grossen Gasbehälter unter dem Druck einer Wassersäule von 6—8 cm Höhe durch einen Kautschukschlauch und die Glasröhre ausströmte, erhielt ich schlanke, 40—60 cm lange, ruhig brennende Flammen. (S. Fig. 2).

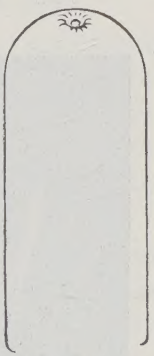


Fig. 1.

Um einen hohen Ton von langer Dauer zu erhalten, verband ich die Galtonpfeife mit einem 50 cdm Luft enthaltenden Behälter; der nötige Druck betrug 20—25 cm Wasserhöhe.

Sobald der Ton erklang, verkürzte sich die Flamme um mehr als die Hälfte und nahm die Form einer Gabel an; diese behielt sie, solange der Ton andauerte. (S. Fig. 3).

---

[1]) W. A. 67, p. 781.

Ich strich verschiedene Stimmgabeln nach einander an und betrachtete die Flamme im Drehspiegel; ihr Bild war in ein Chaos von Flammenzungen aufgelöst, das trotz der Verschiedenheit der Töne keine bedeutende Veränderung wahrnehmen liess, auch dann nicht, wenn ich den einen der beiden Flammenflügel mit einer Metallplatte abblendete: die Flamme schien auf alle Töne in derselben Weise zu reagieren.

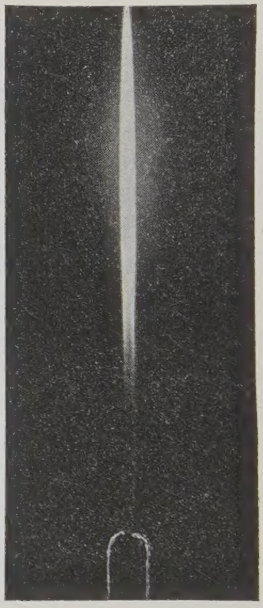


Fig. 2.

Da es unter solchen Umständen unmöglich erschien, aus dem Aussehen der Flamme Schlüsse auf die Höhe der einwirkenden Töne zu ziehen, wollte ich das Verhalten der Flamme gegenüber zwei Tönen kennen lernen.

Dabei zeigte sie eine sehr interessante Eigenschaft.

Als ich nämlich zwei Gabeln der *Appunn*schen Serie (a_6 h_6) zusammen anstrich, erhielt die Flamme plötzlich ein eigenartiges, trübes Aussehen und vibrierte lebhaft, behielt aber im ganzen ihre Gabelform: *zugleich sandte sie einen mächtigen Ton (324 v. d.) von sich aus.* Als ich die Flamme auslöschte und die beiden Gabeln wieder anstrich, gaben sie, abgesehen von ihren kräftig zischenden Tönen, fast unhörbar leise den gleichen Ton an, den die Flamme vorher kräftig aussandte.

Fig. 3

Ich versuchte dasselbe, indem ich je zwei Gabeln (h_6, c_7; c_7, d_7;

d_7, e_7) zusammen anstrich: stets gab die Flamme den Ton (563 bezw. 602, bezw. 223 v. d.) sehr kräftig an, den die beiden Gabeln ohne die Gegenwart der Flamme diskret hören liessen. Schliesslich kombinierte ich die beiden äussersten Töne (a_6 e_7): der Ton (ca. 1710), den die Flamme mit grosser Stärke aussandte, die beiden Gabeln aber nur ganz leise, war seiner Höhe nach gleich der Summe der Töne, welche je zwei benachbarte Gabeln im Intervalle der beiden äussersten erzeugten (324+563+602+223=1712).

Da diese Übereinstimmung nur stattfinden konnte, wenn die beobachteten Töne Differenztöne waren, gelangte ich zu dem Resultat:

die empfindliche Flamme sendet den Differenzton zweier hoher Töne, welche gleichzeitig auf sie wirken, in hohem Grade verstärkt von sich aus.

Um den Differenzton in jeder beliebigen Höhe zu erhalten, benutzte ich zwei Galtonpfeifen, welche durch ein und dasselbe Luftreservoir gespeist wurden; da die Pfeifen mehrere Minuten lang ohne Unterbrechung tönen konnten, hatte ich Gelegenheit, den Verlauf der Kombinationstöne genau zu beobachten. Dabei zeigte sich folgendes:

Als die beiden Pfeifen im Einklang waren, unterschied sich das Aussehen der Flamme von der in Fig. 3 gezeichneten Form nur dadurch, dass die beiden Flammenflügel etwas stärker divergent waren, und dass sich die Verzweigungsstelle der Flammenflügel um einige Millimeter näher der Ausströmungsöffnung befand.

Als die Pfeifentöne Schwebungen mit einander bildeten, falteten sich die Flammenflügel zusammen und breiteten sich wieder aus, erst ganz langsam, dann immer rascher, je nach dem Takte der Schwebungen.

Als die Zahl der Schwebungen grösser wurde, und das Ohr etwa 20 Schläge pro Sekunde wahrnehmen konnte, war das Auge nicht mehr imstande, den Bewegungen der Flamme zu folgen; ihr Anblick sowie das hiebei entstehende Geräusch bot Ähnlichkeit mit dem Flattern eines

Schmetterlings, den man an einem Flügel festhält. Fig. 4 lässt die beiden Grenzlagen, zwischen welchen die Flammenflügel vibrierten, ganz gut erkennen.

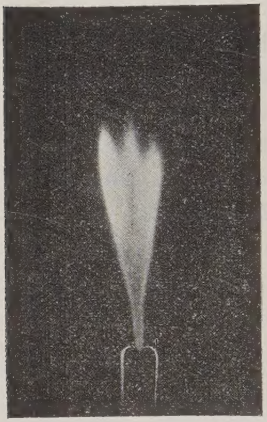


Fig. 4.

Als die Zahl der Schwebungen mehr als 30 pro Sekunde betrug, sandte die Flamme einen tiefen, brummenden Ton aus, ähnlich dem Summen eines grossen Käfers. Dabei schlossen sich die Flammenflügel nicht mehr vollständig wie bei den Schwebungen, sondern vibrierten mit immer kleineren Amplituden, je höher der Ton wurde, den die Flamme in grosser Stärke aussandte.

Die Flamme zeigte an ihrer Verzweigungsstelle zwischen den Flügeln eine intensive brodelnde Bewegung, welche die nächste Ursache des kräftigen Tones zu sein schien. Denn als ich eine Metallplatte in die Flamme hielt und verschiedene Teile derselben abblendete, strahlte der Differenzton stets dann mit besonderer Klarheit und Stärke von der Platte aus, wenn sich diese in der brodelnden Region befand. Eine noch viel grössere Verstärkung des Tones erzielte ich, wenn ich mittels eines Glasröhrchens einen feinen Luftstrom durch die brodelnde Region der Flamme streichen liess: dann brüllte die Flamme förmlich.

Als der Differenzton allmälich eine Höhe von etwa 800 v. d. erreicht hatte, zeigte die Flamme die Form von Fig. 5.

Die brodelnde Region wurde immer kleiner, nahm aber allmählich mit zunehmender Höhe des Differenztones die Form eines wulstigen Knotens an, der sich allmälich weiter nach abwärts senkte. Seine hellblaue Färbe deutet an, dass dort die Verbrennung eine nahezu vollständige ist.

In Fig. 6, welche die Flamme, einen Differenzton von 1200 v. d. aussendend, darstellt, ist dieser Wulst durch

seine hellere Färbung deutlich wahrnehmbar, sowie aus der Seitenansicht der Flamme in Fig. 7.

Fig. 5.

Fig. 6.

Die Flammenflügel zeigten hier beim blossen Anblick kaum eine Spur von Bewegung.

Im Drehspiegel war zunächst wieder eine grosse Anzahl von weiss glänzenden, leuchtenden Zungen in unregelmässiger Anordnung zu erblicken.

An ihren unteren Enden jedoch, in der blauen, schwach leuchtenden Region der Flamme, konnte ich ganz deutlich kurze, hellblau leuchtende Flämmchen beobachten, die durch gleichgrosse dunklere Zwischenräume von einander getrennt waren. Wurde der Differenzton höher, so wurden die Abstände der blauen Flämmchen kleiner; wurde der Ton tiefer, so vergrösserten sie sich. Bei gleicher Höhe des Differenztones und gleicher Umdrehungsgeschwindigkeit des Spiegels blieben sie sich stets gleich.

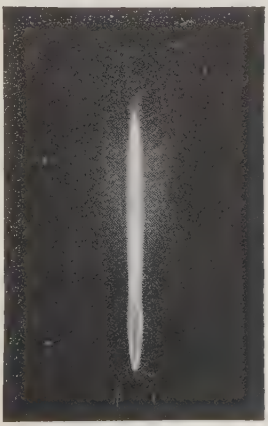


Fig. 7.

Damit war der Beweis erbracht, *dass an der Flamme eine rhytmische Bewegung stattfindet, deren*

Häufigkeit gleich der Schwingungszahl des Differenztones ist und durch welche die Verstärkung des Differenztones bewirkt wird; ferner, *dass diese Bewegung am Fusse des leuchtenden Teiles der Flamme auftritt und zwar gerade an der Stelle, wo sich die Flamme spaltet.*

Ich konnte auf diese Weise den Differenzton bis über die Grenze der Hörbarkeit hinaus verfolgen. Auch dann, wenn sich die Töne der beiden Pfeifchen schon ausserhalb der Gehörgrenze befanden, war nicht nur ihr Differenzton, sondern auch die Kombinationstöne höherer Ordnung ganz deutlich zu hören.

Ebenso konnte ich bei sämtlichen Stimmgabeln [1]) der *Appunn*schen Serie, sowie bei 6 *Melde*schen Stimmplatten, deren Höhe bis gegen 30000 v. d. betrug, den Differenzton und andere Kombinationstöne ohne Schwierigkeit wahrnehmen und ihre Höhe mittels des Tonometers bestimmen.

Historisches.

Eine grosse Anzahl von Notizen und Abhandlungen zeigt, dass sich schon viele Physiker mit der empfindlichen Flamme beschäftigt haben. Ich will in Kürze ihre bisher bekannten Eigenschaften und die Arten ihrer Verwendung aufzählen.

Unter „Empfindlichkeit" der Flamme soll im folgenden nur diejenige Art von Empfindlichkeit verstanden werden, welche darin besteht, dass die Flamme unter Einwirkung eines hohen Tones ihre Form auffallend verändert, ohne dabei selbst zu tönen.

Die Empfindlichkeit gewisser Gasflammen gegen hohe Töne wurde zum erstenmale 1858 von *Leconte* gelegentlich einer musikalischen Unterhaltung zufällig beobachtet.[2]) Sie geriet jedoch wieder in Vergessenheit, bis sie 1865 von *W. F. Barret*, dem Assistenten *Tyndalls*, wieder entdeckt wurde, als dieser mit *Chladni*schen Klangscheiben beschäftigt

[1]) von c_5 an.

[2]) Phil. Mag. 4. Aufl. 15, 235 f.

war.[1]) Von *Tyndall* erhielt sie den Namen *‚sensitive flame‘*. *Barret* nahm zunächst an, Resonanz der Luftsäule im Zuleitungsrohr bedinge ihre Empfindlichkeit. Später[2]) vertrat er *Tyndalls* Annahme, dass die Wirksamkeit des Tones auf die Flamme auf den durch ihn hervorgerufenen Druckänderungen beruhe. 1874 gelangte er zu der Anschauung, dass in dem austretenden Gasstrahl durch den Widerstand der Schallwellen Pulsationen erzeugt würden, deren Anzahl proportional der Ausflussgeschwindigkeit und umgekehrt proportional dem Durchmesser der Öffnung sei. 1877 (*Nature* (5) 16, 12) bemerkte er, dass ihr Bild im Drehspiegel aus einer Menge von Zacken bestehe.

I. Kont[3]) bezeichnet solche Gasflammen als sensible, welche durch die Schallwellen aus einem stabilen in einen labilen Gleichgewichtszustand versetzt werden.

E. Bouty[4]) machte 1895 die empfindliche Flamme zum Gegenstande einer eingehenden Untersuchung. Er stellte insbesondere die Bedingungen auf, unter welchen eine Flamme bei Anwendung verschiedener Gasarten empfindlich wird. Nach seiner Anschauung beruht die Empfindlichkeit der Flamme auf einer Verzögerung in der Verbrennung, wobei einzelne Teile unverbrannten Gases sich losreissen und erst später oder gar nicht verpuffen.

Eine Anzahl kurzer Notizen gibt nur Aufschluss über die Herstellung sensibler Flammen:

A. Weinhold[5]) empfiehlt Specksteinbrenner mit konisch sich verjüngender Öffnung.

G. Govi[6]) bringt über der Öffnung eines Leuchtgasbrenners ein enges Drahtnetz an und entzündet die Flamme oberhalb desselben.

P. Barry[7]) bringt über einen *Sugg*schen Nadellochbrenner Drahtgaze an.

---

[1]) Phil. Mag. 23, 216 ff.
[2]) Phil. Mag. 33, 287, 1867.
[3]) Hunfalvy Lit. Ber. 1877, I, 387.
[4]) Journ. de phys. 4, 401 ff. u. 5, 404 f.
[5]) P. Ann. 136, 333.
[6]) Mondes 25, 360.
[7]) Nature 5,50.

Nach *Geyer*[1]) erhält man eine ausserordentlich empfindliche Flamme, wenn man ein Drahtnetz über einem Brenner in geeigneter Entfernung anbringt und die über dem Drahtnetz entzündete Flamme mit einer Röhre umgibt.

R. H. Ridout[2]) bringt die Flammenröhre in eine weitere Glasröhre; bei bestimmten Stellungen zu derselben wird die Flamme sensibel. Er beobachtete bei den Schwebungen zweier singenden Flammen ein langsames Ausbreiten und wieder Zusammenfliessen der Flügel der empfindlichen Flamme.

W. Haldare Gee[3]) erklärt Bunsenbrenner, welche gerne durchschlagen für sehr sensibel.

V. Neyreneuf[4]) empfiehlt, um konstante empfindliche Flammen zu erhalten, das Rohr des Bunsenbrenners mit einem andern Rohr zu umgeben, durch welches fortwährend kaltes Wasser strömt, sowie die Luftlöcher des Brenners zu schliessen.

Hopkins[5]) wendet zur Herstellung sehr empfindlicher Flammen einen regulierbaren Blasebalg, wie beim *Drummond*schen Kalklicht, an und bringt über einem Gasbrenner mit feiner Öffnung ein Drahtnetz an, so dass die Flamme oberhalb desselben brennt.

F. Brandstätter[6]) stellt eine sehr empfindliche Flamme her, indem er einen Luftstrom durch eine mit Watte gefüllte Röhre strömen lässt; die Watte ist mit gleichen Teilen Äther und Benzol getränkt.

Zur Demonstration von Interferenzerscheinungen wurde die empfindliche Flamme mehrfach benutzt:

Lord Rayleigh[7]) gebrauchte sie zur Bestimmung der Wellenlänge von Tönen bei stehenden Wellen. Er fand,

[1]) Phil. Mag 43, 476.
[2]) 1876, Nature.
[3]) Nature 19, 122.
[4]) Mem. Ac. Caen. 1882
[5]) Nature 17, 367.
[6]) Zschr. f. U. 8, 162.
[7]) Phil. Mag. (5) 7, 149.

im Gegensatz zu den früheren Vermutungen, dass die Flamme an den Knotenstellen die geringste Empfindlichkeit besitze.

W. Leconte Stevens[1]) wies mit ihrer Hilfe Beugung der Schallwellen, Interferenz der direkten mit reflektierten Schallwellen, sowie das akustische Analogon zum *Fresnel*schen Spiegelversuch nach. Dabei fand er, dass die Flamme diese Erscheinung zwar sehr deutlich erkennen lasse, dass sie sich aber zur Ausführung genau messender Versuche nicht eigne.

N. Hesehus[2]) machte *Quinckes* Interferenzversuche für hohe Töne mit einer *Govi*schen Flamme und erzielte sehr genaue Resultate.

Die Anwendung der Flamme zur relativen Schwingungszahlbestimmung.

Die empfindliche Flamme erleichtert die Handhabung der Differenztonmethode zur Bestimmung der Schwingungszahl nicht nur bedeutend, indem sie den Differenzton in hohem Grade verstärkt, sondern sie gestattet sogar die bequeme Handhabung der Methode auf einen viel weiteren Bereich, als bisher möglich war, indem sie die vorher unhörbaren Differenztöne von sehr hohen Tönen deutlich zu Gehör bringt.

Ich bestimmte mittels dieser Methode die Höhe der sämtlichen Gabeln der *Appunn*schen Serie von c_5 an aufwärts, sowie von einigen *Melde*schen Stimmplatten. Die Bestimmung der tiefsten Gabeln c_4—c_5 musste ich indes ohne die Hilfe der Flamme ausführen, da diese erst auf die höheren Gabeln, von c_5 an, reagierte. Die Differenztöne der tiefsten Gabeln waren jedoch mit dem Gehör sehr deutlich zu vernehmen.

---

[1]) Phil. Mag. 27, 435.

[2]) Journal d. russ. phys.-chem. Ges. 24, 156.

Das hiezu benutzte Tonometer enthält die Oktave von 258—516 v. d., in 64 Intervalle geteilt, deren Grösse ich jedoch erst feststellen musste, da sie nicht, wie angegeben, einander genau gleich sind.

Die in der ersten Oktave (c_4—c_5) auftretenden Differenztöne liegen sämtlich innerhalb der Oktave des Tonometers, konnten also direkt am Tonometer abgelesen werden. Die später zu messenden Differenztöne liegen jedoch meist 1, 2 oder gar 3 Oktaven höher als die am Tonometer fixierten Töne, so dass für diese Fälle die Schwingungszahlen der Tonometertöne mit 2, 4 bezw. 8 zu multiplizieren waren.

Bekanntlich geht man von einem Ton mit bekannter Schwingungszahl aus und findet die Schwingungszahl eines anderen durch Subtraktion oder Addition der Differenz beider von oder zu der Schwingungszahl des ersteren.

Die *Appunn*schen Gabeln wiesen ähnliche Fehler in der Bezeichnung der Schwingungszahl auf, wie die von *Melde*, *Stumpf* etc. geprüften. So z. B. hat die höchste Gabel f_8 eine Höhe von 15782 statt 43664 v. d.; g_8, welche die Schwingungszahl 49152 trägt, ist um 90 v. d. tiefer als f_8 (15692).

Zunächst war die Höhe der tiefsten Gabel c_4 zu bestimmen.

Da ich nur das Tonometer, aber keinen Ton von bekannter Höhe zur Verfügung hatte, den ich mit c_4 vergleichen konnte, schlug ich folgenden Weg ein:

Die Differenz zwischen c_4 und seiner Oktave c_5 ist gleich c_4, falls die Oktave rein ist; deshalb suchte ich zunächst eine allenfallsige Abweichung von der reinen Oktave festzustellen.

c_5 ergab mit c_4 10—15 schwache Schwebungen, und zwar konnte ich mittels der Galtonpfeife konstatieren, dass c_5 tiefer sei als $2 \cdot c_4$, und zwar als Mittelwert: $c_5 = 2 \cdot c_4 - 12$.

Die erste Oktave, ohne Hilfe der Flamme (s. o.) bestimmt, ergab folgende Resultate:

$c_5 - h_4 = 231$ v. d.
$h_4 - a_4 = 470$ „
$a_4 - g_4 = 361$ „
$g_4 - f_4 = 391$ „
$f_4 - e_4 = 134$ „
$e_4 - d_4 = 290$ „
$d_4 - c_4 = 221$ „

Also $c_5 - c_4 = 2098$ v. d.

Aus dem Früheren folgt:

$c_4 = 2098 + 12 = 2110$ v. d.
$c_5 = 2110 + 2098 = 4208$ v. d.

Alle folgenden Kombinationstöne wurden mit Hilfe der Flamme beobachtet.

Es ergab sich:

$d_7 - a_6 = 1488$;	$d_7 = 8282$	+	1488	=	9770
$e_7 - d_7 = 220$;	$e_7 = 9770$	+	220	=	9990
$a_7 - d_7 = 1842$;	$a_7 = 9770$	+	1842	=	11612
$d_8 - a_7 = 1850$;	$d_8 = 11612$	+	1850	=	13462
$e_8 - d_8 = 672$;	$e_8 = 13462$	+	672	=	14134
$f_8 - e_8 = 1648$;	$f_8 = 14134$	+	1648	=	15782

$f_8 - a_6 = 7500$
$a_6 = + 8282$
$f_8 = 15782$

Da die angebliche Schwingungszahl von f_8 43664 beträgt, ersieht man, dass die wirkliche Schwingungszahl hinter der angeblichen nahezu um den gleichen Betrag zurückbleibt, wie dies bei den von *Melde* und *Stumpf* untersuchten Gabeln und Pfeifchen der Fall war.

Die Höhe der *Melde*schen Platten I und II fand ich mittels des Differenztones $h - t$, den sie mit einigen vorher bestimmten Stimmgabeln bildeten, wie folgt:

$a_7 - 1532 =$ Platte I
$11612 - 1532 = 10080.$

Pl. I $- a_6 = 1796$ od. $a_6 + 1796 =$ Pl. I
$8282 + 1796 = 10078.$

Als abgerundeten Wert nehme ich die Schwingungszahl von Platte I zu 10080 v. d. an.

Für Platte II fand ich:

$a_7 + 2312 = $ Platte II.
$11612 + 2312 = 13924$

$d_8 + 464 = $ Pl. II.
$13462 + 464 = 13926$

$e_8 - 210 = $ Pl. II.
$14134 - 210 = 13924$

$f_8 - 1852 = $ Pl. II.
$15782 - 1852 = 13930$

Abgerundeter Wert für Pl. II = 13925 v. d.

Ausser h—t verwendete ich zur Bestimmung der Schwingungszahlen noch Kombinationstöne höherer Ordnung und erhielt folgende Resultate:

für Platte III:

aus a'_7 (mittels $2t-h = 1532$): 18008
a_6 „ $h-2t = 1437$: 18001
e_7 „ $2t-h = 1965$: 18015
f_8 „ $h-t = 2210$: 17992
Platte II „ $4t-3h = 1652$: 18016
Abgerundet: Platte III = 18010 v. d.

für Platte IV:

aus a_7 (mittels $2t-h = 1388$): 21836
Pl. I „ $h-2t = 1676$: 21836
Pl. II „ $2h-3t = 1902$: 21839
Abgerundet: Platte IV = 21840 v. d.

für Platte V:

aus d_8 (mittels $2t-h = 1642$): 25476
Pl. I „ $2h-5t = 500$: 25450
Pl. II „ $2t-h = 2392$: 25458
Abgerundet: Platte V = 25460 v. d.

für Platte VI:

aus e_8 (mittels $h-2t$ = 992): 29260
Pl. I „ $3t-h$ = 974: 29266
Pl. II „ $h-2t$ = 1420: 29270
Abgerundet: Platte VI = 29265 v. d.

Vergleicht man die von mir gefundenen Schwingungszahlen mit den von *Melde* angegebenen, nämlich:

Pl. I	= 10080	und 10003	*(Melde)*
„ II	= 13925	13985	„
„ III	= 18010	18060	„
„ IV	= 21840	22060	„
„ V	= 25460	26060	„
„ VI	= 29265	29960	„

so dürfen die Unterschiede nicht auffallend erscheinen.

Melde bestimmte die Höhe seiner Platten nach der „Resonanzmethode" mit Hilfe der Obertöne von Metallstäben.

Es ist naheliegend, dass bei Anwendung des 11., 13., ja 15. Obertones eines Stabes die theoretische Berechnung mit der Wirklichkeit nicht mehr vollständig übereinstimmen mag und daher die daraus gewonnenen Resultate nicht mehr vollen Anspruch auf Genauigkeit erheben können. Bei Anwendung von Differenztönen dagegen handelt es sich nur darum, die Höhe eines nicht sehr hohen Tones zu fixieren, was mit grosser Genauigkeit geschehen kann.

Die Bestimmung der Schwingungszahl eines hohen Tones ist mittels der Differenztonmethode nur in der Weise möglich, dass man von einem bekannten Ton ausgeht und stufenweise die Höhe einer Anzahl von Zwischentönen bestimmt, deren Differenzen unter einander nicht sehr gross sind. Derartige Bestimmungen sind relative zu nennen.

Ich bemerkte jedoch, dass die empfindliche Flamme die Kombinationstöne höherer Ordnung, die sonst bei hohen Tönen nur ausnahmsweise hörbar sind, ebenfalls bedeutend verstärkt, und beobachtete, wie der Verlauf der Kombinationstöne innerhalb einer ganzen Oktave der Primärtöne vor sich ging. Dadurch gelang mir die Aufstellung einer

Methode der absoluten Schwingungszahlbestimmung für hohe Töne.

Die Anwendung der Flamme zur absoluten Schwingungszahlbestimmung.

Der Vorzug dieser Methode vor den bisher bestehenden mikrovibrographischen, optischen, der *Melde*schen Resonanzmethode etc., den sie nur mit der Methode der *Kundt*schen Staubfiguren teilt, soll vor allem darin zu sehen sein, dass sie die Lösung einer akustischen Aufgabe auf rein akustischem Wege ermöglicht.

Prinzip der Methode.

Sind von einer arithmetischen Reihe zwei Glieder, sowie ihre Stellung innerhalb der Reihe bekannt, so kann man jedes Glied derselben leicht ermitteln, da man ebensoviele Gleichungen zur Verfügung hat, als Unbekannte auftreten; man braucht nur die Gesetze der Reihe zu kennen.

In ganz ähnlicher Weise lässt sich die Schwingungszahl eines hohen Tones durch die Methode der Kombinationstöne bestimmen.

Hiezu benutzt man:

1) einen Ton von konstanter Höhe, dessen Schwingungszahl bestimmt werden soll, etwa eine Stimmgabel oder eine *Melde*sche Stimmplatte; ich will ihn in der Folge kurz den „konstanten Ton" nennen.
2) eine Galton-Pfeife, welche von einem grösseren Gebläse gespeist wird; ihre Tonhöhe soll ohne Unterbrechung beständig nach derselben Richtung verändert werden, damit sie mit dem konstanten Ton verschiedene Intervalle durchlaufen kann; ich will sie als „Tonreihe" bezeichnen.
3) ein Tonometer zur Bestimmung der Höhe der auftretenden Kombinationstöne.

Die Kombinationstöne, welche ein Ton von konstanter Höhe mit einer kontinuierlich sich bewegenden Tonreihe erzeugt, bilden nun ebenfalls eine Reihe. Betrachtet man die Kombinationstöne, deren Höhe mittels des Tonometers festgestellt ist, als die bekannten Glieder dieser Reihe, so ergeben sich durch einfache Schlüsse ganz beliebige Glieder dieser Reihe, sofern man die Gesetzmässigkeit kennt, nach der die Kombinationstöne aufeinanderfolgen. Unser konstanter Ton selbst ist ein Glied dieser Reihe.

Wählt man zwei bei der Veränderung des Intervalls der beiden pimären Töne direkt aufeinanderfolgende auffallende Kombinationstöne, so erhält man zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten zur Bestimmung der Höhe des konstanten Tones.

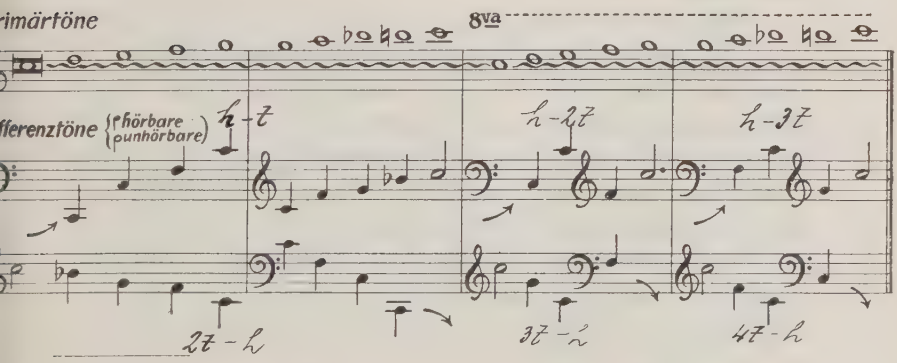
Welcher Artist die Gesetzmässigkeit der Kombinationstöne?

Eine vollständige Zusammenfassung der Kombinationstöne in ein System besteht bisher nicht. Ich will im Folgenden versuchen, eine solche aufzuführen.

C. Stumpf gibt in einer Abhandlung „*Über die Bestimmung hoher Schwingungszahlen durch Differenztöne*“ [1]) eine kurze Übersicht durch folgendes Notenbeispiel, welches zwei Oktaven der Primärtöne umfasst:

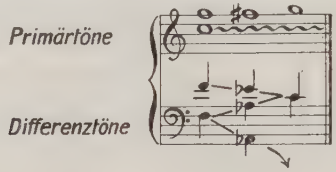
h = der höhere,

t = der tiefere Primärton.



[1]) W. A. 68, p. 105.

Innerhalb der ersten Oktave kommen hier nur zwei Kombinationstöne, $h—t$ und $h—2\,t$, vor; *Stumpf* bemerkt jedoch, dass ausser diesen manchmal noch andere hörbar seien; als Beispiel führt er, wie nachstehend, die zwischen Quarte und Quinte auftretenden an.



Die Bezeichnung $h—t$, $2\,t—h$ etc. entspricht der *Hallstroem*schen[1]) Annahme, nach welcher die Kombinationstöne mit den Primärtönen und unter sich neue Kombinationstöne (höherer Ordnungen) bilden; z. B. $2\,t—h$ bedeutet: der Differenzton $h—t$ bildet mit dem tieferen Primärton t den Kombinationston $t—(h—t) = 2\,t—h$.

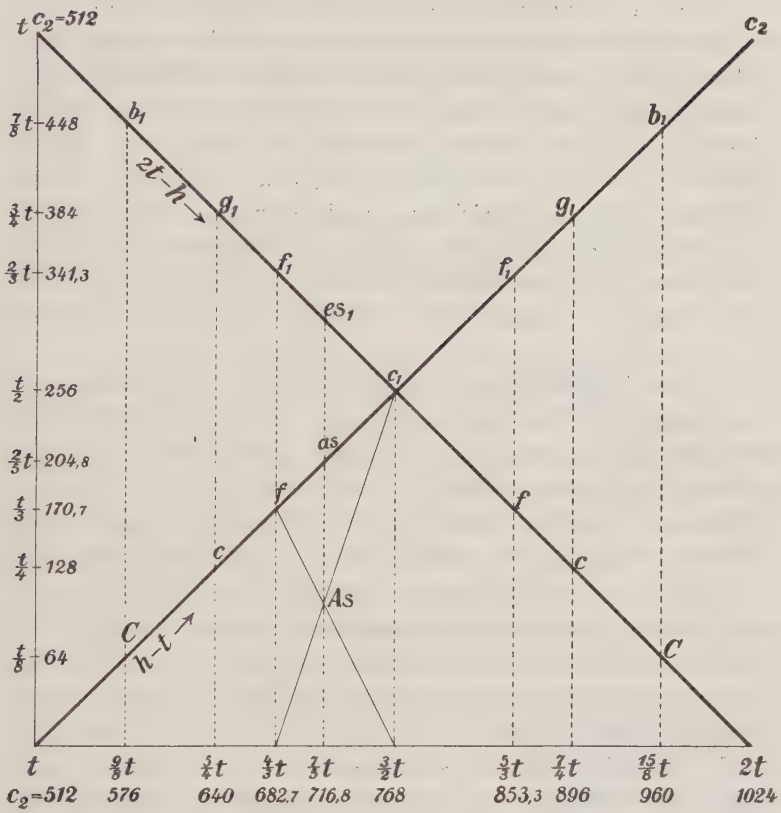
Da obiges Notenbeispiel wenig Übersicht bietet, will ich eine graphische Darstellung vom Verlaufe dieser Kombinationstöne geben und zwar nur derjenigen, welche innerhalb der ersten Oktave auftreten. Diese Art der Darstellung will ich auch im Späteren beibehalten (s. Tafel I und II).

Der Anfangspunkt bezeichnet die Tonhöhe der beiden im Einklang befindlichen Primärtöne, hier $c_2 = 512$ v. d., deren einer konstant bleibt.

Die Zahlen auf der Abszissenachse geben die Erhöhung der „Tonreihe" gegenüber dem „konstanten Ton" in bestimmten Intervallen an, die zugehörigen Ordinaten die Höhe der auftretenden Kombinationstöne, beide zunächst gemessen in Bruchteilen der Schwingungszahl des tieferen Primärtones. Ferner sind auf der Abszissenachse die wirklichen Schwingungszahlen des höheren Primärtons, auf der Koordinatenachse die der Kombinationstöne beigefügt; ausserdem sind die zugehörigen Kombinationstöne nach musikalischem Sprachgebrauch auf den Kurven angeschrieben.

---

[1]) P. A. 24, p. 438.



Als Kurven gezeichnet, stellen sich die Kombinationstöne, welche während der Erweiterung des Intervalls der Primärtöne auftreten, als gerade Linien dar, so dass die Figur ein klares Bild von dem Verlauf ihrer Tonzüge bietet. Die aufwärts gerichteten Linien geben nach der Höhe strebende, die abwärts gerichteten aber nach der Tiefe sinkende Tonzüge an. Je steiler diese Linien sind, um so rascher ansteigend oder fallend muss man sich die durch sie dargestellten Tonzüge denken.

Die stark ausgezogenen Linien stellen die kräftigen Tonzüge *h*—*t* und 2 *t*—*h* vor, die schwach eingezeichneten den im kleinen Notenbeispiel vor. S. angedeuteten.

Um ein vollständiges System der Kombinationstöne aufzustellen, kann man von der *Helmholtz*schen Regel ausgehen: „Die Anzahl der Schwebungen, welche bei der Verstimmung eines Tones in einer Konsonanz (d. h. in einem musikalisch reinen Intervall) um eine Schwingung auftreten, wird gegeben durch die beiden Zahlen, welche das Intervall charakterisieren, und zwar gibt die kleinere Zahl die Zahl der Schwebungen an, welche entstehen, wenn der höhere Ton eine Schwebung mehr macht, die grössere Zahl dagegen gehört der Verstimmung des tieferen Tones an.“ [1]).

Dass bei einfachen Tönen, welche von Obertönen frei sind, ebenfalls dieselben Schwebungen auftreten, wenn auch mit geringerer Intensität, und dass diese ihren Ursprung in den Kombinationstönen höherer Ordnung finden, ist aus *Helmholtz*, l. c. 11. Abschnitt [2]) ersichtlich, und werde ich ein System der Kombinationstöne von einfachen Tönen aufstellen.

Die von mir benutzten Stimmgabeln, Stimmplatten und Galtonpfeifchen liefern nämlich einfache Töne. Die Galtonpfeife enthält zwar als gedackte Pfeife in ihren tiefsten Tönen noch den 3. Oberton wahrnehmbar, bei ihren höheren Tönen nähert sie sich in ihrer Form so sehr der kubischen Pfeife, welche keine regelmässigen Obertöne besitzt, dass ihre Töne ebensogut als einfache gelten dürfen, als die von hohen Stimmgabeln.

Zum erstenmal beobachtete ich die Kombinationstöne an der Violine, wo sie durch die Obertöne der Saitenklänge hervorgebracht werden; ich konstatierte das Auftreten derselben sodann an der tiefsten Oktave zweier Galtonpfeifen, wobei mir der Einfluss ihrer dritten Obertöne bedeutend ins Gehör fiel; endlich fand ich dieselben am deutlichsten mit Hilfe der sensiblen Flamme innerhalb der Oktave c_6—c_7 (8192—16384) und darüber hinaus, wo von Obertönen keine Spur mehr zu bemerken war.

[1]) Helmh. „die Lehre von den Tonempfindungen“, (II. Abt 10. Abschn.) (5. Ausg. p. 308 f).

[2]) p. 327 ff.

Die Aufstellung eines Systems zwingt zur Unterscheidung zweier Fälle, je nachdem die Tonreihe von der Tonhöhe des konstanten Tones weg nach aufwärts oder nach abwärts geführt wird.

I. Fall.

Wie ordnen sich die Kombinationstöne höherer Ordnungen unter den Differenzton, wenn sich die Tonreihe vom konstanten Ton nach aufwärts bis zu dessen Oktave entfernt?

Hiezu Tafel I.

Wie die Erfahrung lehrt, ist der aufsteigende Differenzton $h-t$ nicht während seines ganzen Verlaufes, d. h. bis die Primärtöne allmählich den Abstand einer Oktave von einander erreicht haben, der kräftigste, sondern er wird von der Stelle an, wo er den sinkenden Tonzug $2t-h$ kreuzt, von diesem übertönt. (Hier stehen die Primärtöne im Verhältnis der Quinte).

Unter dem sich Kreuzen zweier Tonzüge verstehe ich den Moment, wo beide dieselbe Schwingungszahl besitzen. Dabei kann sich der eine nach aufwärts bewegen, während sich der andere senkt; in diesem Fall begegnen sie sich. Beide können sich aber auch mit verschiedenen Geschwindigkeiten nach ein und derselben Richtung bewegen; in diesem Fall überholt einer den andern.

Da in der Nähe der Kreuzungsstelle die Schwingungszahlen beider nur um wenig verschieden sind, an der Kreuzung selbst aber gleich, so müssen hier Schwebungen auftreten, deren Anzahl gleich der Differenz aus den Schwingungszahlen der beiden Kombinationstöne ist. Aus diesen Schwebungen bilden sich sodann Kombinationstöne höherer Ordnung.

Die Thatsache, dass von der Quinte ab $2t-h$ kräftiger erscheint als $h-t$, hat darin ihren Grund, dass die Kombinationstöne im allgemeinen um so deutlicher zu erkennen sind, je grösser der Unterschied zwischen ihrer Tonhöhe und derjenigen der primären Töne ist. Von der Quinte ab nähert sich der Differenzton $h-t$ zu sehr dem tieferen

Primärton, um noch genau neben diesem wahrgenommen zu werden. Dies gilt besonders für die hohen Töne, deren ich mich bediente; hier besteht ferner noch die Unmöglichkeit, die Höhe des Differenztones mit dem Tonometer zu fixieren, sobald das Intervall der Quinte erreicht ist.

Daher will ich meine Untersuchung nur auf diejenigen Kombinationstöne ausdehnen, welche an Höhe innerhalb der Kreuzung der beiden kräftigsten Tonzüge $h—t$ und $2t—h$ bleiben. Um das System zu vervollständigen, bräuchte man nur sämtliche in Tafel I gezogenen Linien über ihren Schnittpunkt mit $h—t$ oder $2t—h$ hinaus zu verlängern, wie durch die punktierten Linien teilweise angedeutet.

Betrachten wir nun die Kreuzung von $h—t$ mit $2t—h$! Wo findet dieselbe statt und welche Kombinationstöne entstehen dort?

Im Moment der Kreuzung ist:

$$h—t = 2t—h \text{ oder:}$$

$$\left.\begin{aligned} 2h - 3t &= 0 \\ 3t - 2h &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ neue Komb.-T.}$$

$$h = \frac{3}{2}t, \text{ d. h. die beiden Primärtöne}$$

bilden das Intervall der Quinte.

Die beiden neuen Kombinationstöne unterscheiden sich in ihrer algebraischen Darstellung nur durch das Vorzeichen. Da t stets konstant bleibt,

wird $2h—3t$ bei wachsendem h grösser
$3t—2h$ „ „ h kleiner;

da sie aber bei gleicher Zunahme von h gleiche absolute Werte besitzen, müssen sie als Kurven mit gleicher Neigung gegen die Abszissenachse gezeichnet werden.

Um ihren Verlauf graphisch darstellen zu können, ist von jedem noch ein Punkt zu fixieren. Die genaue Betrachtung der *Helmholtz*schen Regel lehrt, dass die Kombinationstöne höherer Ordnung viel rascher ansteigen bezw. sinken als diejenigen niederer Ordnung; der eine der beiden Tonzüge muss also $h—t$, der andere $2t—h$ überholen. Wo findet nun dieses Überholen statt?

a) $3t-2h = h-t$ oder

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ 3h-4t = 0 \\ 2)\ 4t-3h = 0 \end{array}\right\} \text{neue Komb.-T.}$$

$h = \frac{4}{3}t$, d. h. $3t-2h$ erreicht $h-t$, wenn die Primärtöne aus dem Intervall der Quinte in das der Quarte übergegangen sind.

b) $2h-3t = 2t-h$ oder

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ 3h-5t = 0 \\ 2)\ 5t-3h = 0 \end{array}\right\} \text{neue Komb.-T.}$$

$h = \frac{5}{3}t$, d. h. die Primärtöne bilden das Intervall der grossen Sexte.

Wie ersichtlich, entstehen an jeder Kreuzungsstelle neue Kombinationstöne.

ad a, 1): $4t-3h = h-t$ oder

$$\left.\begin{array}{l} 5t-4h = 0 \\ 4h-5t = 0 \end{array}\right\} \text{neue K.-T.}$$

$$h = \frac{5}{4}t \text{ (grosse Terz)}$$

ad a, 2): $3h-4t = h-t$ oder

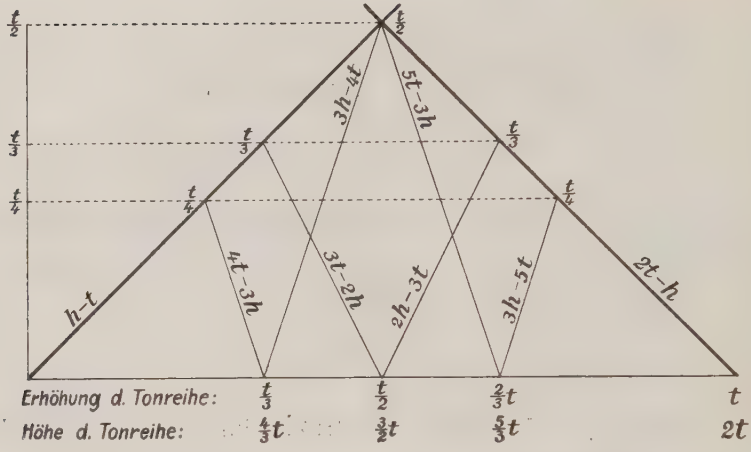
$$\left.\begin{array}{l} 2h-3t = 0 \\ 3t-2h = 0 \end{array}\right\} \text{neue K.-T.}$$

$$h = \frac{3}{2}t \text{ (Quinte) etc.}$$

Folgend sind die bisher abgeleiteten Kombinationstonzüge graphisch dargestellt, im gleichen Massstabe wie oben.

Zusammenfassung:

Zwischen der grossen Terz und der Quarte verläuft $4t-3h$ nach abwärts; zwischen Quarte und Quinte geht $3t-2h$ nach abwärts, $3h-4t$ nach aufwärts; zwischen der Quinte und grossen Sexte zieht $2h-3t$ aufwärts, $5t-3h$ abwärts; zwischen gr. Sexte und der musikalisch gemiedenen „natürlichen Septime" zieht $3h-5t$ aufwärts.



Ebenso entstehen zwischen dem Einklang und der Quinte der Primärtöne:

$$\left.\begin{aligned} 5h - 6t &= 0 \\ 6t - 5h &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ wenn } h = \frac{6}{5}t \text{ (kleine Terz)}$$

$$\left.\begin{aligned} 6h - 7t &= 0 \\ 7t - 6h &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ wenn } h = \frac{7}{6}t$$

$$\left.\begin{aligned} 7h - 8t &= 0 \\ 8t - 7h &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ wenn } h = \frac{8}{7}t$$

$$\left.\begin{aligned} 8h - 9t &= 0 \\ 9t - 8h &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ wenn } h = \frac{9}{8}t \text{ (gr. Sekunde)}$$

$$\left.\begin{aligned} 9h - 10t &= 0 \\ 10t - 9h &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ wenn } h = \frac{10}{9}t$$

$$\left.\begin{aligned} 10h - 11t &= 0 \\ 11t - 10h &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ wenn } h = \frac{11}{10}t \text{ etc.}$$

und zwischen Quinte und Oktave:

Kreuzung: $3h - 5t = 2t - h$ oder

$$\left.\begin{aligned} 4h - 7t &= 0 \\ 7t - 4h &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$h = \frac{7}{4}t \text{ (nat. Septime)}$$

Kreuzung: $5t - 3h = h - t$ oder

$6t - 4h = 0$, d. h.

$3t - 2h = 0$

$$h = \frac{3}{2}t \text{ (Quinte)}$$

ebenso:
$$\left.\begin{aligned} 9t - 5h &= 0 \\ 5h - 9t &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ für } h = \frac{9}{5}t;$$
$$\left.\begin{aligned} 11t - 6h &= 0 \\ 6h - 11t &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ für } h = \frac{11}{6}t;$$
$$\left.\begin{aligned} 13t - 7h &= 0 \\ 7h - 13t &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ für } h = \frac{13}{7}t;$$
$$\left.\begin{aligned} 15t - 8h &= 0 \\ 8h - 15t &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ für } h = \frac{15}{8}t: \text{ gr. Sept.}$$

Bezeichnet man nach *Hallstroem* $h-t$ und $2t-h$ als Kombinationstöne I. Ordnung, so sind alle übrigen bisher aufgeführten solche II. Ordnung. Die ersteren sind entstanden aus der Kombination der Primärtöne bezw. des tieferen Primärtones mit $h-t$, die letzteren aus einem Kombinationston und $h-t$ oder $2t-h$.

Jene sind in Tafel I kräftig, diese schwächer gezeichnet.

Ich beobachtete jedoch auch noch Kombinationstöne III. Ordnung. Sie sind in Tafel I ganz schwach ausgezogen und aus je zweien II. Ordnung erzeugt, wie im Folgenden abgeleitet:

Zwischen Prime (Einklang) und Quinte:

Kreuzung: $3h - 4t = 3t - 2h$ oder
$$\left.\begin{aligned} 5h - 7t &= 0 \\ 7t - 5h &= 0 \end{aligned}\right\}$$
$$h = \frac{7}{5}t \text{ (verminderte Quinte)}$$

Kreuzung: $4h - 5t = 4t - 3h$ oder
$$\left.\begin{aligned} 7h - 9t &= 0 \\ 9t - 7h &= 0 \end{aligned}\right\}$$
$$h = \frac{9}{7}t \text{ (übermässige Terz)}$$

Kreuzung: $5h - 6t = 5t - 4h$ oder
$$\left.\begin{aligned} 9h - 11t &= 0 \\ 11t - 9h &= 0 \end{aligned}\right\}$$
$$h = \frac{11}{9}t$$

Zwischen Quinte und Oktave:

Kreuzung: $5t - 3h = 2h - 3t$ oder

$$\left.\begin{aligned} 8t - 5h &= 0 \\ 5h - 8t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$h = \frac{8}{5} \text{ (kleine Sexte)}$$

Kreuzung: $7t - 4h = 3h - 5t$ oder

$$\left.\begin{aligned} 12t - 7h &= 0 \\ 7h - 12t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$h = \frac{12}{7}t \text{ (übermäss. Sexte)}$$

Kreuzung: $9t - 5h = 4h - 7t$ oder

$$\left.\begin{aligned} 16t - 9h &= 0 \\ 9h - 16t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$h = \frac{16}{9}t \text{ (grosse Septime).}$$

Die Betrachtung der Tafel I lehrt, dass die Kombinationstöne zweier Töne von deren Quintenverhältnis aus nach beiden Richtungen, gegen den Einklang und gegen die Oktave hin, vollständig symmetrisch angeordnet sind. Ferner erkennt man folgende mit Versuchen übereinstimmende Thatsachen:

1) Befinden sich die Primärtöne in Intervallen, welche durch die Verhältnisse 3:2, 4:3, 5:4, 6:5 etc. charakterisiert sind, so gibt die Verhältniszahl eins immer die Höhe des Differenztones $h - t$ an, d. h. beträgt die Schwingungszahl der Primärtöne $3n$ und $2n$ etc., so ist die des Differenztones gleich n; folglich ist, z. B.:

$$\text{für } h = \frac{3}{2}t\text{: } h - t = \frac{t}{2}$$

$$\text{„ } h = \frac{4}{3}t\text{: } h - t = \frac{t}{3}$$

$$\text{„ } h = \frac{5}{4}t\text{: } h - t = \frac{t}{4} \text{ u. s. w.}$$

2) Bei solchen Intervallen, deren Verhältniszahlen nicht direkt aufeinanderfolgende Zahlen der natürlichen Zahlenreihe sind, bezeichnet die Verhältniszahl eins die Höhe des Differentones $2t—h$, d. h. für die Schwingungszahlen $5n$ und $3n$ etc.; der Primärtöne ist die des Tones $2t—h$ gleich n, folglich ist z. B.

$$\text{für } h = \frac{5}{3}t\text{: } 2t—h = \frac{t}{3}$$

$$\text{„ } h = \frac{7}{4}t\text{: } 2t—h = \frac{t}{4} \text{ u. s. w.}$$

3) Da eine beliebige Ordinate innerhalb des von den Tonzügen $h—t$ und $2t—h$ begrenzten Rahmens 3 Schnittpunkte mit den Linien der Kombinationstöne aufweist, müssen für ein beliebiges, nicht musikalisch reines Intervall zweier Primärtöne im allgemeinen 3 Kombinationstöne hörbar sein. Nur dann, und immer dann, wenn die Primärtöne eines der sämtlichen oben angeführten Intervalle bilden, wenn sich also Kombinationstöne mit $h—t$ oder $2t—h$ kreuzen, hört man nur einen einzigen Kombinationston, diesen aber mit auffallender Stärke und in klarer Reinheit.

Sämtliche in Tafel I eingezeichnete Kombinationstöne beobachtete ich mit Hilfe der sensiblen Flamme an den Tönen zweier, die Intervalle der Oktave $c_6—c_7$ (8192—16384) durchlaufender Galtonpfeifchen. Ohne die Flamme war nur der Differenzton $h—t$ und $2t—h$, sowie noch eine Spur von $3t—2h$ und $2h—3t$ wahrzunehmen. Die empfindliche Flamme zaubert aber ein förmliches Gewebe von Kombinationstönen aus zwei einfachen Tönen hervor, dessen Knoten in einfacher Anordnung geknüpft sind.

Man hört zunächst den kräftigen Differenzton $h—t$, der als $2t—h$ seine Richtung umkehrt. Ferner hört man gleichzeitig zwei sich in entgegengesetzter Richtung bewegende Kombinationstöne, deren einer in den Differenzton übergeht, während sich der andere in Schwebungen

auflöst. Diese Kombinationstöne II. Ordnung sind schon bedeutend schwächer als der Differenzton $h—t$. Im Moment des Überganges hört man nur den Differenzton, durch den schwächeren Kombinationston noch verstärkt; derartige Übergangspunkte, die Knoten des feinen Gewebes, sind hörbar, so oft die Primärtöne ein reines Intervall bilden. Den Übergang zwischen je zwei solchen Knoten vermitteln zwei sich kreuzende Kombinationstöne II. Ordnung. Endlich sind noch sehr schwach die Kombinationstöne III. Ordnung zu vernehmen, ferner die punktiert gezeichneten Fortsetzungen der Kombinationstöne II. Ordnung über $h—t$ hinaus.

Die oben erwähnten Knoten spielen bei der Bestimmung von Schwingungszahlen die Hauptrolle und wir wollen unsere Aufmerksamkeit nochmals auf sie lenken.

Die durch sie dargestellten Töne sind identisch mit den Stosstönen, welche bei reinen Intervallen auftreten und mittels welcher *R. König* die Stimmung seiner hohen Stimmgabeln durchführte.[1]) Nach *König* ist die Anzahl der Stösse m und m' zweier Töne mit den Schwingungszahlen n und n' gleich dem positiven oder negativen Rest der Division $n' : n$, d. h.

$$n' = h\,n + m \text{ oder}$$
$$m = n' - hn$$
$$\text{und } n' = (h + 1)\,n — m' \text{ oder}$$
$$m' = (h + 1)\,n — n'$$

Die Ursache der Stösse liegt nach *König* in periodischer Koinzidenz der gleichartigen Maxima beider Wellenzüge und die Stösse gehen bei genügender Häufigkeit in Stosstöne über.

Tafel I lehrt: Entfernen sich zwei Töne vom Einklang allmählich bis zur Oktave, so treten nacheinander solche Stosstöne auf, deren Schwingungszahlen bestimmte Bruchteile der Schwingungszahl des tieferen Primärtones t sind,

[1]) Vgl. Poggd. Ann. 157, p. 203 ff. „Über den Zusammenklang zweier Töne“ und W. A. 69 „Höchste hörbare und unhörbare Töne“.

nämlich: $\frac{t}{n}, \ldots \frac{t}{7}, \frac{t}{6}, \ldots \frac{t}{3}, \frac{t}{2}$, solange $h-t$ steigt; nach der Umkehrung in $2t-h$ folgen: $\frac{t}{3}, \frac{t}{4}, \frac{t}{5}, \ldots$ $\frac{t}{8}, \ldots \frac{t}{n}$

Um die Schwingungszahl des Tones t zu finden, verfahre ich folgendermassen:

Ich bestimme zunächst die Höhe zweier bei Erweiterung des Intervalls direkt auf einander folgender reiner Stosstöne (Knoten): sie seien 1024 bezw. 1170 v. d.

Dann bestehen die Gleichungen:

$$1024 = \frac{t}{n} \quad \text{oder} \quad t = n \cdot 1024$$

$$1170 = \frac{t}{n-1} \quad „ \quad t = (n-1) \cdot 1170$$

$$\text{Comp.: } n \cdot 1024 = (n-1) \cdot 1170$$

$$\text{Hieraus: } \quad n = \frac{1170}{1170-1024} = 8{,}01 = 8.$$

$$\text{Also } t = 8 \cdot 1024$$

$$\underline{\underline{t = 8192.}}$$

Die reinen Stosstöne sind mit Hilfe der sensiblen Flamme leicht zu fixieren; denn sie treten nur auf, wenn mehrere Kombinationstöne zusammenfliessen; diese Momente werden durch Schwebungen angezeigt, welche die Flammenflügel in rhytmische Bewegung bringen. Diese Schwebungen sind jedoch nur ganz in der Nähe eines Knotens zu beobachten. Die Knoten bezw. Stosstöne selbst sind frei von Schwebungen.

Für die Bestimmung der Höhe von Tönen mit mehr als 12000 v. d. empfiehlt sich eine Variation des Verfahrens insoferne, als man den unbekannten konstanten Ton als den höheren festhält und die Tonreihe von demselben nach abwärts führt.

Im Folgenden wollen wir den Verlauf der Kombinationstöne für diesen Fall betrachten.

II. Fall.

Wie ordnen sich die Kombinationstöne höherer Ordnung unter den Differenzton, wenn sich die Tonreihe vom konstanten Ton nach abwärts bis zu dessen Oktave entfernt?

Hiezu Tafel II.

In Tafel II sind nur die Kombinationstöne II. Ordnung eingezeichnet, da diejenigen III. Ordnung bei der Bestimmung von Schwingungszahlen keine Rolle spielen.

Der Koordinaten-Anfangspunkt befindet sich am *rechten* Ende der Ordinatenachse. Dementsprechend nimmt die Differenz der Schwingungszahlen der Primärtöne nach links hin zu.

Hat sich der eine der Primärtöne bis zur tieferen Oktave des anderen von diesem entfernt, so ist in diesem Moment $h-t = \frac{h}{2}$ oder $2t-h = 0$.

$h-t$ und $2t-h$ sind auch hier die beiden kräftigsten Kombinationstöne I. Ordnung, welche die übrigen, schwächeren, gleichsam in ihren Rahmen zwingen.

Da in diesem Fall der höhere Primärton der konstante ist, will ich nun die Höhe der Kombinationstöne durch h ausdrücken.

Kreuzung: $2t-h = h-t$ sagt:

$$\left.\begin{aligned} 3t - 2h &= 0 \\ 2h - 3t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$t = \frac{2}{3}\,h \text{ und } h-t = \frac{h}{3}, \text{ d. h.}$$

Der Differenzton hat an dieser Stelle den dritten Teil der Höhe des konstanten Tones, während er an derselben Kreuzung im I. Fall (Tafel I) die Hälfte der Höhe des konstanten Tones, der dort allerdings der tiefere ist, besitzt.

In Tafel II ergeben sich von hier aus nach der rechten Seite (gegen den Einklang) hin:

Kreuzung: $3t-2h = h-t$ oder

$$\left.\begin{aligned} 3h-4t &= 0 \\ 4t-3h &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$h-t = \frac{h}{4};$$

Kreuzung: $4t - 3h = h - t$ oder

$$\left.\begin{aligned} 4h - 5t &= 0 \\ 5t - 4h &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$h - t = \frac{h}{5} \text{ u. s. w.}$$

also genau wie in den beiden Hälften von Tafel I.

Nach links jedoch (gegen die Oktave hin):

Kreuzung: $2h - 3t = 2t - h$ oder

$$\left.\begin{aligned} 5t - 3h &= 0 \\ 3h - 5t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$2t - h = \frac{h}{5}$$

Kreuzung: $3h - 5t = 2t - h$ oder

$$\left.\begin{aligned} 7t - 4h &= 0 \\ 4h - 7t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$2t - h = \frac{h}{7}$$

Kreuzung: $4h - 7t = 2t - h$ oder

$$\left.\begin{aligned} 9t - 5h &= 0 \\ 5h - 9t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$2t - h = \frac{h}{9} \text{ u. s. w.}$$

In diesem Fall verlaufen also die Kombinationstöne von der Quinte aus nicht symmetrisch nach beiden Seiten.

Die reinen Stosstöne, welche allmälich von der Quinte der Primärtöne bis zur Oktave auftreten, bilden die Reihe $\frac{h}{3}, \frac{h}{5}, \frac{h}{7}$ etc.

Während es im Fall I gleichgiltig ist, ob man zur Schwingungszahlbestimmung die im Verlaufe von $h - t$ oder $2t - h$ auftretenden reinen Stosstöne benutzt, besteht im Fall II gerade hierin ein Unterschied, da die reinen Stosstöne in $h - t$ eine andere Anordnung zeigen als in $2t - h$.

Zur Erläuterung dienen die beiden Beispiele einer nach Fall II ausgeführten Tonhöhenbestimmung:

1. Beispiel: ich beobachte auf dem bei Erweiterung des Intervalls ansteigenden Tonzug $h—t$ aufeinanderfolgend die reinen Stosstöne 1365 und 1638. Dann gilt:

$$h = 1365 \cdot n$$
$$h = 1638\ (n—1)$$
$$n = 5;$$
$$\text{also } \underline{h} = 5 \cdot 1638 = \underline{8190.}$$

2. Beispiel: auf dem sinkenden Tonzug $2\ t—h$ beobachte ich die reinen Stosstöne 1638 und 1170. Hier gilt:

$$h = 1170 \cdot n$$
$$h = 1638\ (n—2)$$
$$n = 7$$
$$\text{also } \underline{h} = 7 \cdot 1170 = \underline{8190.}$$

Bei der Ausführung von Schwingungszahlbestimmungen fixiert man nicht zwei, sondern möglichst viele aufeinanderfolgende reine Stosstöne, um einen möglichst genauen Mittelwert zu erhalten.

Man ersieht aus dem Vorhergehenden, dass man sich zunächst darüber klar sein muss, ob sich die beobachteten Stosstöne auf $h - t$ oder $2\ t—h$ befinden. Deshalb ist es nötig, die beiden Primärtöne zuerst in den Einklang zu stimmen. Sind die beiden Primärtöne noch hörbar, so ist dies sehr leicht; denn die Schläge solcher Töne üben auf das Ohr eine so mächtige Wirkung aus, dass eine Täuschung ausgeschlossen ist. Vom Einklang aus sind dann die Kombinationstöne nach Tafel I oder II leicht zu verfolgen.

Liegt der zu bestimmende Ton bereits ausserhalb der Gehörgrenze, so ist die Bestimmung schwieriger, da die Schläge solcher Töne weniger überzeugend auf das Gehör wirken; man kann sich leicht in der Oktave irren. Probiert man jedoch die ganze Tonreihe mit dem unbekannten Ton durch, so findet man bald diejenige Stelle der Tonreihe, welche der Höhe des unbekannten Tones entspricht; denn die Kombinationstöne $h—t$ und $2\ t—h$ zeichnen sich durch 3 Eigenschaften vor allen übrigen aus:

1) sie besitzen die grösste Stärke,
2) sie nehmen den langsamsten Verlauf, d. h. sie können keinen gleichgerichteten Tonzug überholen
3) sie schliessen ein förmliches Gewebe von schwächeren Kombinationstonzügen ein, die sich oftmals kreuzen.

Bis zu welcher Grenze liefert diese Methode brauchbare Resultate?

Ich habe mittels dieser Methode die Schwingungszahlen einer *Appunn*schen Stimmgabelserie (bis zu 16000 v. d.), von Stimmplatten bis zu 30000 v. d., Pfeifentönen bis gegen 40000 v. d. bestimmt. Eine genaue obere Grenze lässt sich nicht festsetzen, da verschiedene Momente mitwirken,

Stimmplatten von grosser Höhe sind nicht andauernd zum Tönen zu bringen, überhaupt nicht leicht zum Klingen zu erregen, während Galtonpfeifchen bis zu sehr grosser Höhe anhaltende intensive Töne hervorbringen, welche die Handhabung der Methode ziemlich einfach gestalten.

Da die Methode im Grunde darauf beruht, die Höhe des Differenztones $h—t$ oder $2\,t—h$ an verschiedenen Stellen genau zu fixieren, so findet jede Bestimmung ihre Grenze, sobald der Differenzton eine Höhe erreicht hat, welche seine genaue Bestimmung unmöglich macht.

Ein geschultes Ohr ist imstande, Töne bis zu 4000 v. d. mit genügender Sicherheit zu bestimmen; daher können nur solche reine Stosstöne zur Berechnung verwendet werden, welche diese Höhe nicht überschreiten.

Daher kommen für einen Ton von 10000 v. d. $\frac{t}{3}, \frac{t}{4}, \frac{t}{5}, \frac{t}{6} \ldots$, also nach Tafel I alle reinen Stosstöne ausser $\frac{t}{2}$, oder nach Tafel II $\frac{h}{3}, \frac{h}{4}, \frac{h}{5}, \frac{h}{6} \ldots$, also sämtliche in Betracht, während für einen Ton von 30000 v. d. nach Tafel II nur $\frac{t}{8}, \frac{t}{9}, \frac{t}{10}, \frac{t}{11} \ldots$ benutzt werden können. Im letzteren Falle stützt sich das Resultat auf

wenige Stosstöne, während im ersteren aus vielen Daten ein zuverlässiger Mittelwert erhalten werden kann.

Die Genauigkeit der Methode.

Abgesehen von der Verlässigkeit des Tonometers hängt die Genauigkeit der Methode vor allem ab von der Fähigkeit des Beobachters, möglichst geringe Tondifferenzen mit dem Gehör wahrzunehmen, wenn der zu bestimmende Differenzton um zwei oder gar drei Oktaven höher liegt als der Messton des Tonometers.

Ein geschultes Ohr ist imstande, Unterschiede von einer Schwingung in der eingestrichenen Oktave festzustellen, so dass der Fehler, den man bei einer Bestimmung machen kann, höchstens $\frac{1}{n}$ beträgt, wenn n die Schwingungszahl des betreffenden Tones in der eingestrichenen Oktave bedeutet.

Das von mir benutzte Tonometer enthielt die Töne der eingestrichenen Oktave (258—516 v. d.) in Intervallen von je 4 Schwingungen. Der Fehler liegt also innerhalb $\frac{1}{258} - \frac{1}{516}$, beträgt also $2-4\,‰$.

Die Methode liefert in der Hand des geübten Beobachters Resultate, deren Genauigkeit von keiner der zahlreichen Methoden zur Bestimmung der Schwingungszahl hoher Töne übertroffen wird, viele aber weit übertrifft.

Insbesondere ist sie dann vorteilhaft, wenn die sonst verlässige Methode der *Kundt*schen Staubfiguren nicht zum Ziele führt. Dies war bei den höchsten *Melde*schen Platten der Fall; es gelang mir nur, von den beiden tiefsten Platten zu Messungen geeignete Staubfiguren zu erhalten.

Tonhöhenbestimmungen mittels der beschriebenen Methode.

Ich bestimmte die Höhe der 5 ersten *Melde*schen Stimmplatten, und zwar Platte I nach dem I. Fall, die übrigen nach dem II. Fall.

Platte VI auf dieselbe Weise zu bestimmen war mir nicht möglich, da sie stets nur sehr kurze Zeit klang, während welcher ich die Tonreihe nicht so weit verändern konnte, um den Verlauf der Kombinationstöne genau feststellen zu können; ich hörte jedoch stets die äusserst kurzen Kombinationstöne, welche sie mit der Tonreihe bildete.

Platte I (nach Fall I):

Ich hörte sehr deutlich die reinen Kombinationstöne: 1260, 1442, 1678, 2016, 2516.

Es muss sein: $1260 \cdot n = 1442 \cdot (n-1)$

$$n\,(1442-1260) = 1442$$

$$n = \frac{1442}{182} = 8 \text{ (abger).}$$

Also wird die Schwingungszahl von Platte I:

$1260 \cdot 8$	=	10080
$1442 \cdot 7$	=	10094
$1678 \cdot 6$	=	10068
$2016 \cdot 5$	=	10080
$2516 \cdot 4$	=	10064
Mittelwert	=	10078

Platte II (nach Fall II):

$2320 \cdot 6$	=	13920
$1992 \cdot 7$	=	13944
$1740 \cdot 8$	=	13920
$1548 \cdot 9$	=	13932
$1392 \cdot 10$	=	13920
Mittelwert	=	13927

Platte III:

$2252 \cdot 8$	=	18016
$2000 \cdot 9$	=	18000
$1802 \cdot 10$	=	18020
$1635 \cdot 11$	=	17985
Mittelwert	=	18005

Platte IV:

$2425 \cdot 9$	=	21825
$2184 \cdot 10$	=	21840
$1988 \cdot 11$	=	21868
Mittelwert	=	21844

Platte V:

$2312 \cdot 11$	=	25432
$2122 \cdot 12$	=	25464
$1960 \cdot 13$	=	25480
Mittelwert	=	25459

Prüfung der Methode durch Kundtsche Staubfiguren.

Die *Kirchhoff*sche Formel für die Schallgeschwindigkeit in Röhren $v' = V\left(1 - \frac{\gamma}{2r\sqrt{\pi n}}\right)$ lässt sich zur Berechnung der Schwingungszahl eines hohen Tones nach *Schulze*[1]) in die Form umwandeln:

$$\sqrt{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right) = \frac{\gamma}{2r\sqrt{\pi}} \; (= A), \text{ wobei}$$

n = Schwingungszahl in freier Luft

$N = \frac{V_t}{\lambda} = \frac{\text{Schallgeschw. in freier Luft bei } t^0}{\text{Länge einer Welle in der } \textit{Kundt}\text{schen Röhre}}$

γ = eine von Reibung und Wärmeleitung abhängige Konstante, von *Kirchhoff* theoretisch zu 0,00588, von *Kayser* experimentell zu 0,0235 bestimmt

$2r$ = Durchmesser der Röhre.

[1]) W. A. 68, 869 ff.

Bestimmung von Platte I.

Ablesung der Wellenbäuche nach mm

0	
16,75	
33,5	
50,25	
67,25	
84	
100,75	
117,5	
134,25	
151	
168	
184,5	
201,25	
218	
234,75	
251,5	
268,25	
285	
301,75	
318,25	
334,75	
351,25	
368	
385	
401,5	
418,25	
435	
451,5	
468,5	

Nach der Methode der kleinsten Quadrate:

28 · 468,5	=	13118
26 · 434,75	=	11303,5
24 · 401,5	=	9636
22 · 368	=	8096
20 · 334,25	=	6685
18 · 301	=	5418
16 · 267,25	=	4276
14 · 233,75	=	3272,5
12 · 200,5	=	2406
10 · 167,25	=	1672,5
8 · 133,75	=	1070
6 · 100,5	=	603
4 · 67	=	268
2 · 33,5	=	+ 67
		67891,5

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{67891.5 \cdot 2 \cdot 3}{28 \cdot 29 \cdot 30}$$

plaus. Wert von $\lambda = 33{,}444\,\text{mm}$;

$$V_t = V_0\,(1 + 0{,}00367 \cdot t)$$

$$V_{13,5} = 332{,}25\,^{1})\,\sqrt{1 + 0{,}00367 \cdot 13{,}5}$$

$$= 340{,}38 \text{ m.}$$

Hieraus $N = \frac{V_t}{\lambda} = 10178.$

Die Formel $\sqrt{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right) = A$ lässt sich praktischer schreiben:

$$n = N\left(1 - \frac{A}{\sqrt{N}}\right) \text{ oder}$$

$$n = \sqrt{N}\,(\sqrt{N} - A)$$

$$\sqrt{10178} = 100{,}91$$

A (für $r = 0{,}006$ m) $= 1{,}1049$;

also $n = 100{,}91 \cdot 99{,}8051$

$$n = 10069.$$

[1]) von Moll, van Beek und Kuytenbrower experimentell bestimmt (s. Melde, Akustik, p. 241).

Bestimmung von Platte II.

Ablesung der Wellenbäuche

0
12
24
36,25
48,25
60,5
72,5
84,75
96,75
109
121
133,25
145,25
157,5
169,75
181,75
194
206
218
230,25
242,25
254,5
266,75
278,75
291
303
315,25
327,25
339 5
351,75
363,75
376
388 25
400 25

Plausibelster Wert von λ:

$$\lambda = 24{,}2816 \text{ mm.}$$

$$N = \frac{V_{13,5}}{\lambda} = 14018$$

$$\sqrt{N} = 118{,}4$$

$$n = 118{,}4 \cdot 117{,}2951$$

$$\underline{\underline{n = 13890.}}$$

Die Resultate, welche durch die beiden Methoden erhalten wurden, zeigen einen so geringen Unterschied, dass

wir sie als vollkommen mit einander übereinstimmend betrachten dürfen.

Auf die Prüfung der übrigen Resultate musste ich leider verzichten, da es mir niemals gelang, von einer der höheren Platten messbare Staubfiguren zu erhalten.

Die Handhabung dieser neuen Methode zur Schwingungszahlbestimmung mag auf den ersten Blick schwerfällig erscheinen. Sehr praktisch erweist sie sich jedoch in der Hand eines Beobachters, der ein musikalisch geschultes Gehör besitzt, und sie eignet sich für genaue Bestimmungen insbesondere auch deshalb, weil ausser einem genau abgestimmten Tonometer die nötigen Hilfsmittel sehr primitiver Natur sind, und weil Temperaturkorrektionen etc. nicht auszuführen sind.

Curriculum vitae.

Nikolaus Schmidt, geboren zu München am 6. April 1877, besuchte das k. Luitpoldgymnasium zu München, das er im Jahre 1895 absolvierte. 1895/96 leistete er seiner einjährigen Militärdienstpflicht Genüge und widmete sich sodann dem Studium der Mathematik und Physik an der Universität München. 1898 unterzog er sich dem I., 1900 dem II. Abschnitt der Prüfung für das Lehramt in Mathematik und Physik. Im Januar 1901 wurde er dem k. Gymnasium Ingolstadt als Assistent beigegeben und ebendort im September 1901 definitiv angestellt.

INHALT:

Seite

Die Appunn—Meldesche Polemik 3

Eine neue Erscheinung an der sensiblen Flamme 6

Historisches 10

Die Anwendung der Flamme zur relativen Schwingungszahlbestimmung . 13

„ „ „ „ zur absoluten Schwingungszahlbestimmung . 18

(Aufstellung einer neuen Methode)

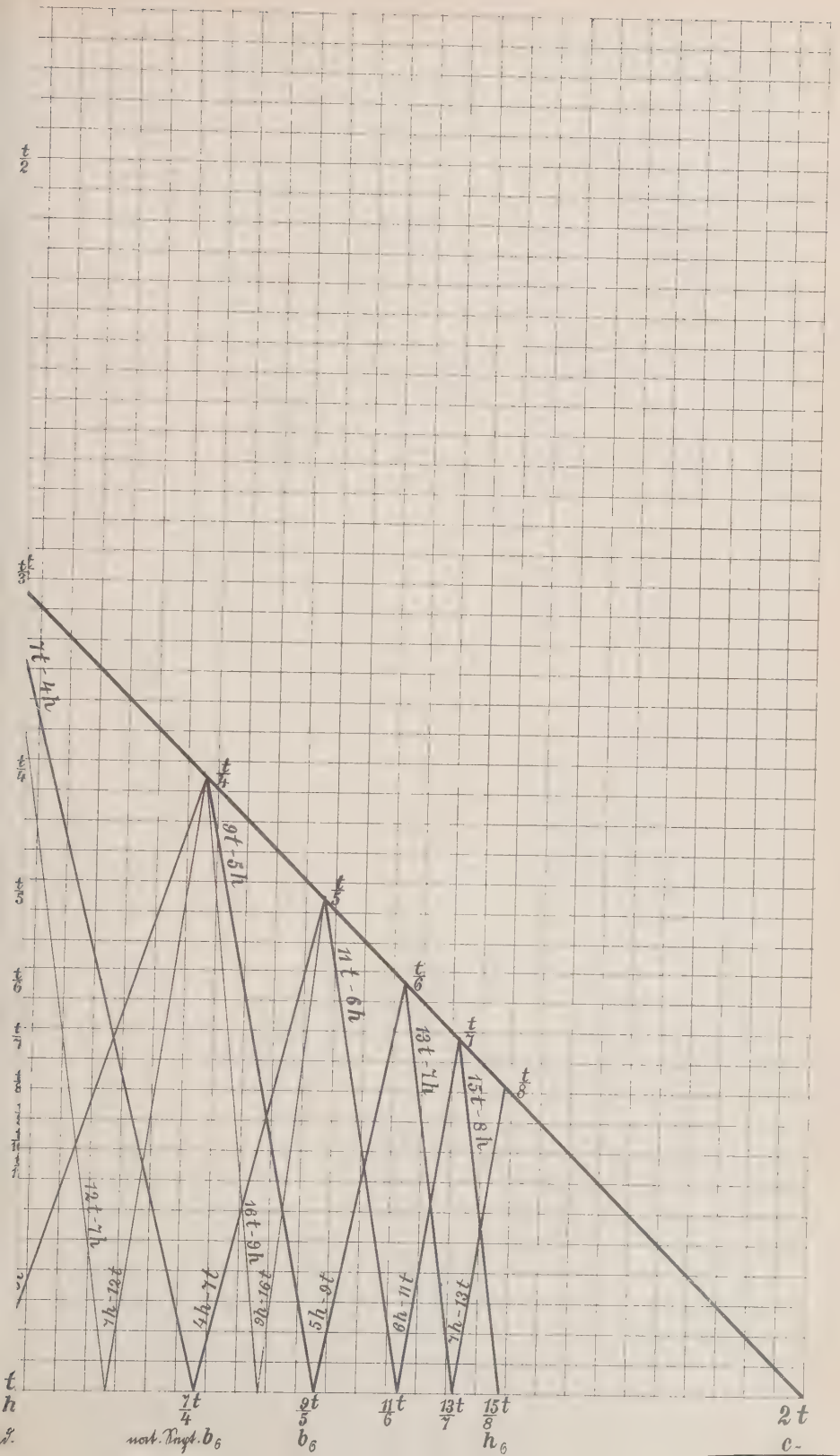
I. Fall 23

II. Fall 32

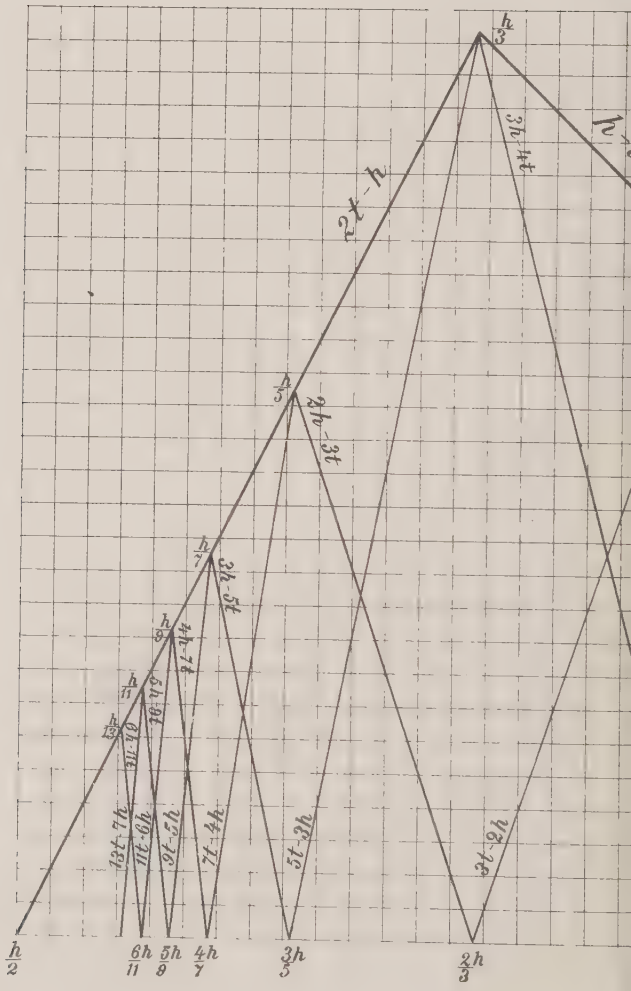
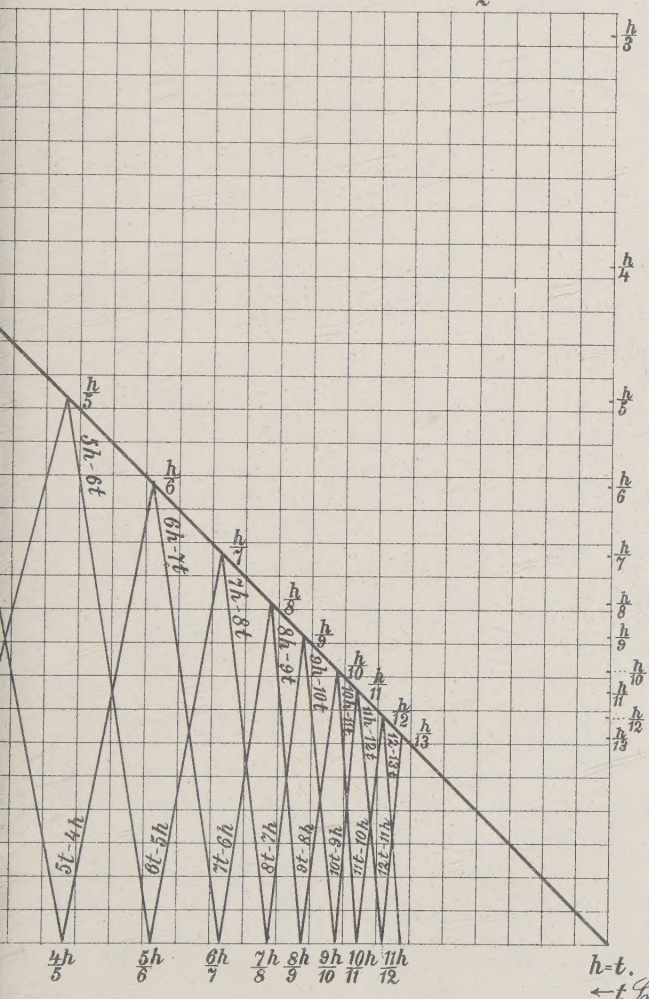
Tonhöhenbestimmungen mittels der neuen Methode 37

Prüfung der neuen Methode durch Kundtsche Staubfiguren 38

t bleibt konstant,
h wächst von t bis 2t.



Tafel II (zu p. 32 ~~40~~.)



h bleibt konstant,
t sinkt von h bis $\frac{h}{2}$.